

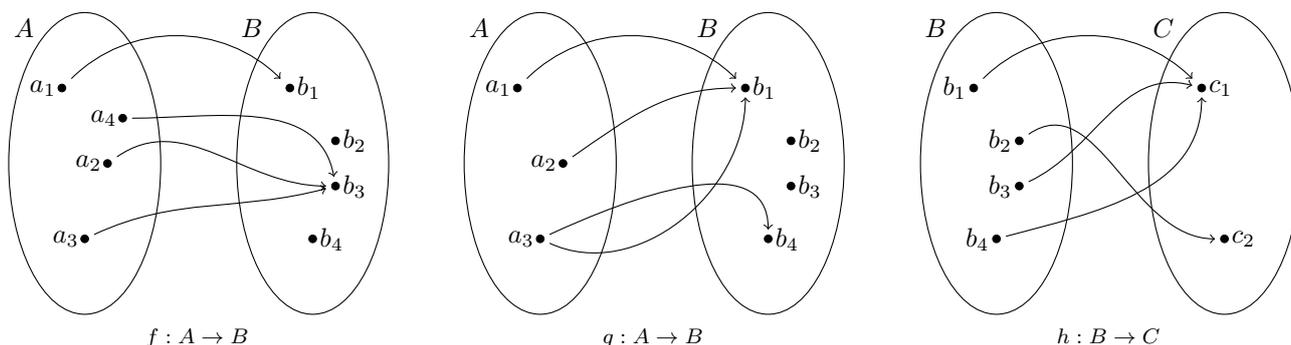
## Matematica generale: compito del 7 settembre 2012

Gli esercizi siglati con **solo 9 CFU** non devono essere svolti da chi deve fare l'esame per 5 CFU.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato insufficiente.

1. Siano  $f$ ,  $g$  e  $h$  come nella figura che segue:



- (a) Dire quali tra  $f$ ,  $g$  e  $h$  non sono funzioni, e perché.
- (b) Per ciascuna funzione, dire quali sono il dominio e l'immagine.
- (c) Per ciascuna funzione, dire se è iniettiva. Giustificare la risposta.
- (d) Si può fare la composizione  $h \circ f$  tra  $f$  ed  $h$ ? Se sì, descriverla con un disegno come in figura.

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{1 + 2x + x^2}{x^2 - 4} \leq 0.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(3-x)}{2} & \text{se } x < 3, \\ e^{x-3} & \text{se } x \geq 3, \end{cases}$$

determinarne

- (a) il dominio;
  - (b) il segno;
  - (c) gli eventuali asintoti;
  - (d) gli intervalli di crescita e decrescenza;
  - (e) eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;
  - (f) gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;
  - (g) il grafico.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione  $f(x)$  dell'esercizio 3 e dall'asse delle  $x$ , in corrispondenza dell'intervallo  $(1, e)$ .
5. Calcolare l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{3x}{(5+x^2)^2} dx.$$

6. Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n^3 - 1}{\ln(n)} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 1}{5^{n+1}}$$

convergono.

7. (**solo 9 CFU**) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolare

- (a)  $\det A$ ;
- (b) dire se  $A$  è invertibile, e in caso affermativo calcolare  $A^{-1}$ ;
- (c) trasposta di  $A^2$ .